OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA
18.02.2012
Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie multimea $G=(0,\pi)$ si legea de compozitie $xoy=arcctg(ctgx+ctgy), \forall x,y\in G$

a) Arătati că (G,o) este grup abelian.

b) Arătati că grupul (G,o) este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

Problema 2.

Fie $(G,\cdot)$ un grup si e elementul său neutru. Elementele $a,b\in G$ satisfac condiţ iile: $b^6=e$ si $ab=b^4a$.

Arătati că: $b^3=e$ si $ab=ba$.

Problema 3.

Fie integrala $I_n=\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x}}}}_{n\ radicali}}dx$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Calculati: I_1, I_2

b) Aflati I_n unde $n\geq 3$.

Problema 4.

Fie $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Arătati că functia $f_m:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f_m(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{m}{x}\right) & ,x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

admite primitive pe $\mathbf{R}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se evaluează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

www.olimpiade.ro
PORTALUL OLIMPIADELOR

Subiectele propuse au fost selectate de prof. Hecser Enikő și prof. Mátéfi István.